

# EGYSZERŰ KÍSÉRLET RUGALMAS INGÁVAL

## Tartalomjegyzék

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| A kísérleti feladat bemutatása.....                   | 2  |
| A kísérleti berendezés.....                           | 2  |
| A kísérlet menete, a jó mérés előfeltételei.....      | 3  |
| Kísérleti eredmények.....                             | 3  |
| Követelmények.....                                    | 3  |
| A kísérleti feladat ajánlójának a megoldása .....     | 3  |
| Előzmények .....                                      | 3  |
| A mérési adatok értelmezése .....                     | 4  |
| Az egyenértékű tehetetlenség kiszámítása.....         | 5  |
| Az egyenértékű tehetetlenség analitikus formája ..... | 6  |
| A rezgés periódusa.....                               | 7  |
| A rugó tömegének ellenőrzése.....                     | 9  |
| Hibaforrások .....                                    | 9  |
| Következtetések.....                                  | 10 |
| Mérés közbeni hangulat.....                           | 11 |

# EGYSZERŰ KÍSÉRLET RUGALMAS INGÁVAL

Laborgyakorlat és versenyfeladat a nagyvárad ADY Endre Líceumban

szerző: dr. Bartos-Elekes István, Nagyvárad, beistvan@yahoo.com

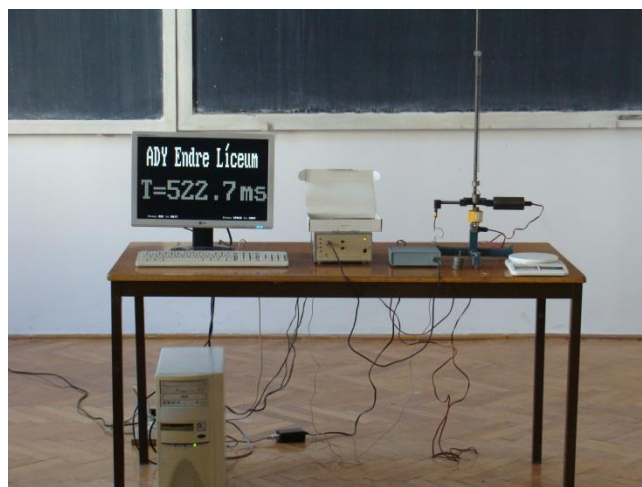
**Mottó:** „Egy kísérletet csak akkor tarthatunk befejezettnek, ha teljesen kiaknáztuk a mérési adatokban rejlő lehetőségeket”.

## A kísérleti feladat bemutatása

A rugalmas inga tanulmányozása az egyik legkönnyebben megoldható iskolai kísérleti feladatnak tűnik. Ebben a leírásban a rendkívülien egyszerű ingaképlet érvényességét fogjuk keresni, de a precíz mérőrendszer ellenére, vagy éppen miatta, ez első nekifutásra nem sikerül. A körülmények elemzése, a mérési adatok mélyre nyúló faggatása ad majd választ az első sikertelennek tűnő próbálkozásainkra. Az eddig elhanyagolt, vagy éppen nem ismert jelenségek figyelembevételével sikerül igazolnunk az új számításaink alapján levezetett ingaképletet. *A kísérleti feladat bemutatásra kerülő teljes megoldása egy igazi adatfeldolgozási csemege.*

### A kísérleti berendezés

A XX. Schwartz Emlékversenyen (Nagyvárad, 2010) ez a laborgyakorlat ebben a formában adatfeldolgozási versenyfeladat volt (1. ábra). A kísérlet elvégzéséhez a következő eszközök állnak rendelkezésre: állvány, két hasonló rugó, tizedgrammnyi pontossággal megmért nehezékek, egy számítógép-vezérelt elektromágnes és fénySOROMPÓVAL ellátott precíziós időközmérő. A kísérlet biztos indítására egy ismert tömegű állandó nehezék szolgál, amelyet az elektromágnes képes visszatartani és egyúttal biztosítja a függőleges mozgást és az állandó amplitúdót. A kísérlet indításakor, az elektromágnes elengedi az állandó nehezéket (*felette vannak a többiek, azokat váltogatjuk*), amely kitakarja a fénySOROMPÓT, az így keletkezett jelet az assemblyben írt software még nem dolgozza fel, mert az csak a takarás kezdetére érzékeny, a végére nem. A periódust egy 100 kHz-es kvarcetalon impulzusainak megszámlálásával mérjük, egy periódusnak megfelelő két nullponton való ereszkedő áthaladás takarásai között. A rugó non-linearitása hatásának gyengítése érdekében az amplitúdót 10 mm-re korlátoztam, a nullátmeneti pontatlanságok csökkentése miatt a mérési időtartam tíz periódus.



**1. ábra.** Számítógép-vezérelt mérőberendezés a rugalmas inga periódusának meghatározására.

írt software még nem dolgozza fel, mert az csak a takarás kezdetére érzékeny, a végére nem. A periódust egy 100 kHz-es kvarcetalon impulzusainak megszámlálásával mérjük, egy periódusnak megfelelő két nullponton való ereszkedő áthaladás takarásai között. A rugó non-linearitása hatásának gyengítése érdekében az amplitúdót 10 mm-re korlátoztam, a nullátmeneti pontatlanságok csökkentése miatt a mérési időtartam tíz periódus.

A mérés végeztével a számítógép kijelzi a mért periódust, ezután a rendszer készen áll az új mérésre. A háttérben Excel-kompatibilis mérési jegyzőkönyv is készül. A rugókkal kapcsolatos fontosabb adatokat az 1. táblázatban láthatjuk.

| 1. táblázat                             |         |         |
|-----------------------------------------|---------|---------|
| A rugókkal kapcsolatos fontosabb adatok |         |         |
| Megnevezés                              | X Rugó  | Y Rugó  |
| Menetszám                               | 114     | 144     |
| Nyugalmi hossz                          | 275 mm  | 193 mm  |
| Egy menet átlagos átmérője              | 14,2 mm | 14,3 mm |
| A kötőelem + állandó nehezék tömege     | 45,7 g  |         |
| A rugó tömege                           | 19,4 g  | 24,6    |

## A kísérlet menete, a jó mérés előfeltételei

Az egész osztállyal végzett kísérlet esetében egyedi stopperórákkal határozzuk meg a rezgés periódusát. Régebben a **Fizikum** számítógép-vezérelt iskolai csengőjének nagybetűs időkijelzését 250 ms-os ritmusúra állítottam, ez egy kis gyakorlattal még számlálható. A Lissajous-szerű mozgást elkerülendő, a nehezéket csak a rögzítési függőleges mentén engedjük mozogni. Néhány kilengés után, ha tartja a függőlegességet, nullától kiindulva megszámláljuk a felső helyzetekből az egyensúlyi helyzeten való átmeneteket (**0..n**), ez **n** periódust jelent. Az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor a sebesség a legnagyobb, így a legpontosabban kaphatjuk meg annak időpontját. A kísérletező társa a stopperórát kezeli, vagy a 250 ms-okat figyeli. A stopperórás módszernél a stoppert együtt mozgatja a rezgőmozgást végző nehezékkel (*szinkronizálja*), így stopper indítása-megállítása néhány századmásodperces pontosságú lesz, és az **n** periódus idejéhez képest csökken a nullátmenet detektálási bizonytalansága. A számítógépes rendszernél az időközmérés feloldása 10  $\mu$ s, a többi automatikusan megvalósul a fentebb leírtak szerint. A nagyszámú, ismételt mérés esetén a stopperórás megoldás is jó eredményekhez vezet.

## Kísérleti eredmények

A XX. Schwartz Emlékversenyen bemutatott laborgyakorlat mérési eredményeit és egyes jelöléseket a 2. táblázatban foglaltam össze.

## Követelmények

A versenyzők már megszokhatták, hogy ezen a versenyen konkrét követelmények helyett csupán néhány elindító gondolatot kapnak. A középiskolai laborgyakorlatok során lehetőségek volt (*lehetett volna*) arra, hogy egyszerűsített modellek segítségével, valós kísérleteket végezve, szembesüljete a tanultakkal. Akárhogyan is volt, most itt a lehetőség. A *fizikustól sosem azt kéri, hogy fedezzen fel valamit*. Megvizsgálja a mérési eredményeket. Grafikonokat szerkeszt. Ha ezek semmit sem mondanak, eldobja őket, más formában újraserkeszti, majd felfedez valami szokatlant: *az iskolában tanult elmélet nem egyeztethető össze a mérési adatokkal*. A fizika alapelveit felhasználva keressétek meg az összeférhetetlenségek okait! **Legyetek végre igazi fizikusok! Sok sikert!**

dr. Bartos-Elekes István

| 2. táblázat                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |           |           |           |           |           |         |            |            |                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|------------|------------|----------------|
| Az oszlopok jelentése: $m_0$ a kísérletben minden alkalommal felhasznált állandó nehezék tömege; $m_A, m_B, m_C, m_D$ a 25, 50, 100, 200 grammos nehezékek valódi tömege; $m$ a felhasznált testek össztömege; $T_x$ [ms], $T_y$ [ms], $T_{xpy}$ [ms] az X, Y rugók valamint a párhuzamos kötéséből alkotott rezgőrendszer periódusa |           |           |           |           |           |         |            |            |                |
| Nr.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | $m_0$ [g] | $m_A$ [g] | $m_B$ [g] | $m_C$ [g] | $m_D$ [g] | $m$ [g] | $T_x$ [ms] | $T_y$ [ms] | $T_{xpy}$ [ms] |
| 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 45.7      | 25.0      | 49.7      | 100.2     | 200.8     |         |            |            |                |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 45.7      |           |           |           |           | 45.7    | 438.7      | 381.3      | 313.4          |
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 45.7      | 25.0      |           |           |           | 70.7    | 531.8      | 460.9      | 368.9          |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 45.7      |           | 49.7      |           |           | 95.4    | 605.6      | 529.0      | 415.8          |
| 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 45.7      | 25.0      | 49.7      |           |           | 120.4   | 678.0      | 589.5      | 459.6          |
| 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 45.7      |           |           | 100.2     |           | 145.9   | 738.3      | 651.1      | 499.4          |
| 6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 45.7      | 25.0      |           | 100.2     |           | 170.9   | 798.4      | 697.0      | 536.5          |
| 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 45.7      |           | 49.7      | 100.2     |           | 195.6   | 851.8      | 745.2      | 569.7          |
| 8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 45.7      | 25.0      | 49.7      | 100.2     |           | 220.6   | 896.7      | 787.5      | 601.9          |
| 9                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 45.7      |           |           |           | 200.8     | 246.5   | 944.4      | 829.0      | 635.4          |
| 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 45.7      | 25.0      |           |           | 200.8     | 271.5   | 990.6      | 869.4      | 663.4          |
| 11                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 45.7      |           | 49.7      |           | 200.8     | 296.2   | 1035.2     | 907.5      | 692.4          |
| 12                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 45.7      | 25.0      | 49.7      |           | 200.8     | 321.2   | 1081.0     | 945.2      | 717.8          |
| 13                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 45.7      |           |           | 100.2     | 200.8     | 346.7   | 1115.3     | 977.6      | 745.3          |

## A kísérleti feladat ajánlójának a megoldása

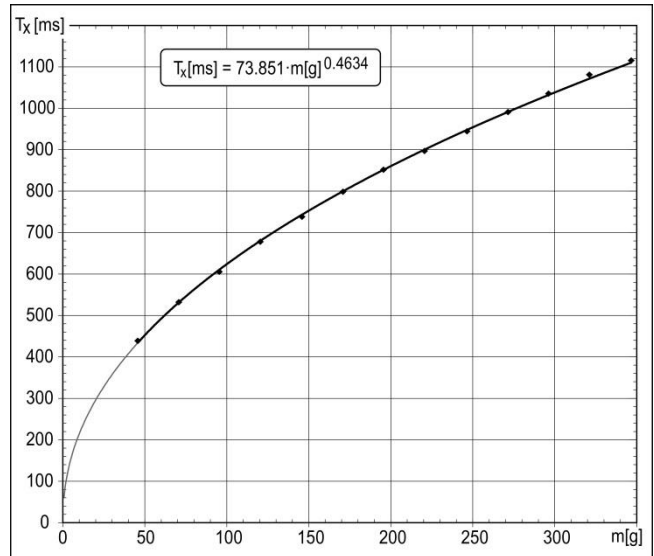
## Előzmények

Mivel a jól ismert  $T=2\pi\sqrt{m/k}$  periódusképlet igen egyszerű, esetleg hiányozhat is belőle egy eddig elhanyagolt tag. Az elméleti számításokban azt a tényt eddig nem vettük figyelembe, hogy a **k** rugó-állandó (a magyarországi terminológia szerint **D** - **direkciós állandó**, ezt az elnevezést sohasem értettem) a rugót nem jellemzi teljes egészében. Az egyenletesen tekercselt rugó esetében a rugó anyagi pontjainak sebessége lineárisan nő a rugó tengelye mentén, vagyis egyszerűen kiszámíthatjuk a

rugó mindegyik pontjának a sebességét. Meg kell találnunk ennek a mozgási energiának az eredetét, mert az energiatranszfer befolyásolhatja a rezgés periódusát. Mindezek ellenére a képlet az iskolai laboratóriumok lehetőségeinek megfelelő pontosságú értéket ad, *a papír meg úgyis mindent kibír*. Iskolánk fizikai laboratóriumában (**Fizikum**), még a '90-es évek legelején egy **CNC (Computer Numerical Control)** időmérőrendszert fejlesztettem ki, a **100 kHz**-es kvarcból származó órajel feloldóképessége **10  $\mu$ s**, a periódusokat ezzel határoztam meg. A rugóra akasztott nehezékek tömegét egy 0,1 g feloldóképességű elektronikus mérleggel mértem meg. A két mérés pontossága elégséges volt a laborgyakorlat sikeres elvégzéséhez.

### A mérési adatok értelmezése

A fizikus a mérései befejeztével, kíváncsiságból, még az SI-re való áttérés előtt megrajzolja a mérésekből származó grafikonokat. Számára ezek a grafikonok többet mondanak, mint bármely, esetleg csak egyszerűsített alapokon nyugvó elmélet. A 2. ábrán látható a rezgés  $T_x[\text{ms}]$  periódusának függése az  $X$  rugóra akasztott test  $m[\text{g}]$  tömegétől. A periódus látszólag arányos az  $m[\text{g}]$  tömeg négyzetgyökével, az ordinátatengely pedig érintője a meghosszabbított illesztőgörbének. *Mindegyik úgy van, mint az iskolai elméletben!* Mégis van egy picit különbség: a közelítő hatványfüggvény kitevője kisebb, mint  $1/2$ , ami a négyzetgyököknek felelne meg. Ekkor helytelenül mondhatnánk: **hibás méréseket végeztünk!** Nem, itt teljesen másról van szó!



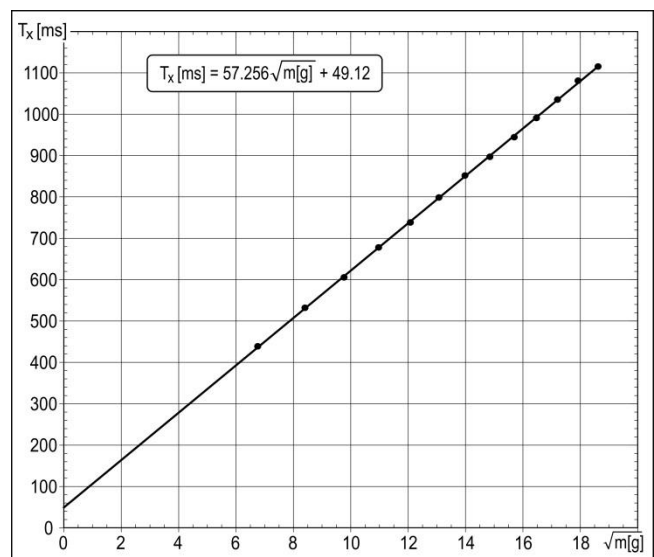
2. ábra. Az  $X$  rugóból és ráakasztott nehezékből álló rendszer periódusának ( $T_x[\text{ms}]$ ) függése a nehezék  $m[\text{g}]$  tömegétől négyzetgyökösnek tűnő görbét ad.

Ha a rugalmas inga periódusát a nehezék tömegének négyzetgyöke függvényében ábrázolnánk, akkor az origón áthaladó egyenest kellene kapnunk. A 3. ábrán az illesztőgörbe egy tökéletes egyenes, ezért meghosszabbítottam az origó felé. *Tettetett, nagy meglepetésemre, az egyenes nem halad át az origón!* Ez azt jelenti, hogy a rugó a ráakasztott nehezékek nélkül is rezegne, amit kísérletileg is ellenőriztem. Ezek szerint van egy **figyelman kívül hagyott tehetetlenség**, amelyet nem tudunk elkerülni! Feltételezzük, hogy a rugó ezzel a tehetetlenséggel szegül ellen a részecskéi sebessége megváltoztatásának. Ezt az egyenértékű tehetetlenséget hozzá kell adnunk a nehezék  $m$  tömegéhez, és meg is kell határoznunk az értékét.

Jelölje  $\mu$  ezt az egyenértékű tehetetlenséget, ekkor a periódus képlete így alakulna:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m+\mu}{k}} \quad [1]$$

Ebben a képletben nem tudjuk szétválasztani a két tehetetlenséget, ezért az előbbieken a  $T$  ábrázolása a nehezék tömege négyzetgyökének



3. ábra. Az  $X$  rugóból és ráakasztott nehezékből álló rendszer periódusának ( $T_x[\text{ms}]$ ) függése a nehezék  $m[\text{g}]$  tömegének négyzetgyökétől egy egyenest ad.

függvényében ( $\sqrt{m}$ ) nem vezethet a  $\mu$  egyenértékű tehetetlenség és a  $k$  rugóállandó egyidejű meghatározásához.

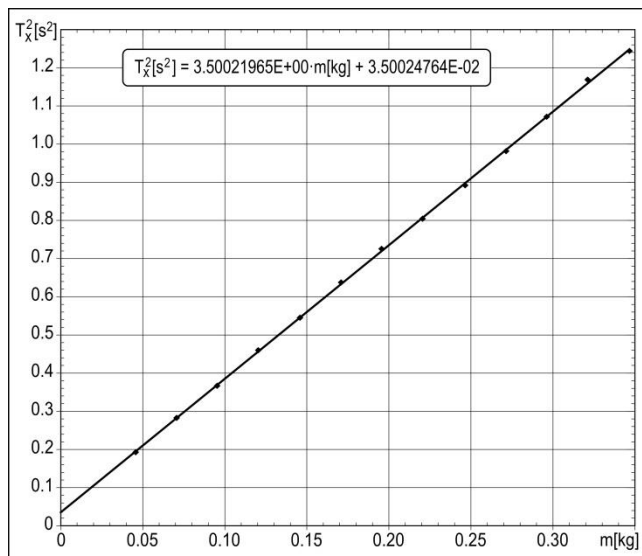
Ha az [1] egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, akkor egy egyenest kapunk  $m$ -ben, az irányítványzó tartalmazza a rugóállandót ( $k$ ), a szabadtág pedig a rugó egyenértékű tehetetlenségét ( $\mu$ ):

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m + \frac{4\pi^2}{k}\mu \quad [2]$$

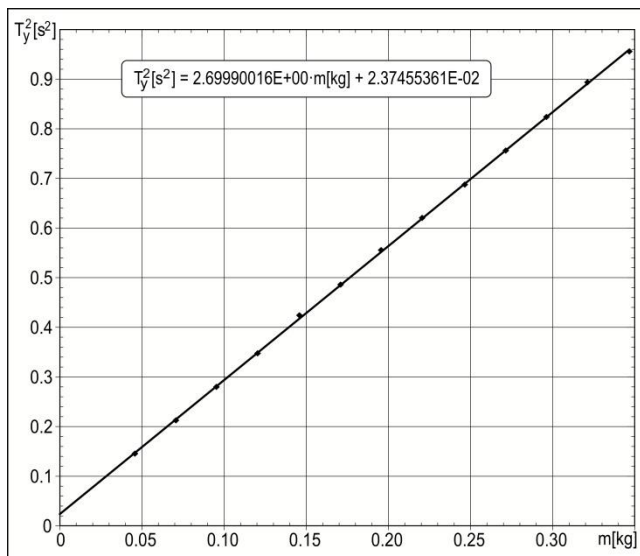
A két ismeretlent tökéletesen szétválaszthatjuk a  $T^2 = a \cdot m + b$  egyenlet együtthatóiból:

$$\frac{4\pi^2}{k} = a \quad \rightarrow \quad k = \frac{4\pi^2}{a} \quad [3]$$

$$\frac{4\pi^2}{k}\mu = b \quad \rightarrow \quad \mu = b/a \quad [4]$$



4. ábra. Az X rugóból és ráakasztott nehezebből álló rendszer periódusa négyzetének ( $T_x^2[s^2]$ ) függése a nehezék  $m[kg]$  tömegétől egy egyenest ad.



5. ábra. Az Y rugóból és ráakasztott nehezebből álló rendszer periódusa négyzetének ( $T_y^2[s^2]$ ) függése a nehezék  $m[kg]$  tömegétől egy egyenest ad.

A 4., 5., 6. ábrák a  $T^2[s^2] = f(m[kg])$  függvényt ábrázolják, ahol  $T$  az inga periódusa,  $m$  a nehezék tömege. A grafikonokat rendre megszerkesztettem az X és Y rugókból létrejött ingákra, valamint a két rugó párhuzamos kötéséből létrejött rugalmas ingára.

A  $k$  rugóállandókat a [3]-as képlet segítségével számoljuk ki, a  $\Delta k$  értéksávját statisztikai módszerekkel kaptam meg, a rugóállandó értéksávja százalékban:  $\delta k_x = \pm 0,79\%$ ;  $\delta k_y = \pm 0,63\%$  és  $\delta k_{xpy} = \pm 0,30\%$ , ahol  $\delta k = \pm \Delta k/k \cdot 100\%$ .

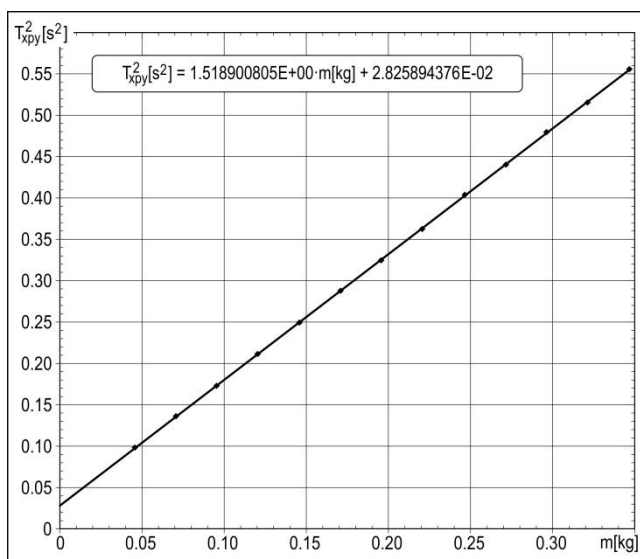
X rugó:  $k_x = 11,28 \text{ N/m} \pm 0,0896 \text{ N/m}$ ;

Y rugó:  $k_y = 14,62 \text{ N/m} \pm 0,0926 \text{ N/m}$ ;

XpY rugók:  $k_{xpy} = 25,99 \text{ N/m} \pm 0,0790 \text{ N/m}$ .

#### Az egyenértékű tehetetlenség kiszámítása

Anélkül, hogy érdekelne bennünket a tehetetlenség természete, a három illesztőegyenest analiti-



6. ábra. Az X és Y rugóból és ráakasztott nehezebből álló rendszer periódusa négyzetének ( $T_{xpy}^2[s^2]$ ) függése a nehezék  $m[kg]$  tömegétől egy egyenest ad.

kus formáinak szabadtágjaiból kiszámíthatjuk az X rugó, az Y rugó és párhuzamosan kötött rugók egyenértékű tehetetlenségeinek az értékét, valamint a meghatározások hibáit. Az eredményeket a 3. táblázatba foglaltam össze.

### Az egyenértékű tehetetlenség analitikus formája

Ez a tehetetlenség egyaránt jelentkezik a rugó megnyúlásakor, vagy összenyomásakor, a változás irányától függetlenül. Az  $m_R$  tömegű és  $L$  hosszúságú rugó egyik vége rögzített, a másik  $v$  pillanatnyi sebességgel mozog (7. ábra). A rögzített végtől valahol  $x$  távolságra levő  $dm$  elemi tömeg pillanatnyi sebessége  $u$ , ez függ a  $dm$ -nek a rugóban levő helyzetétől. A rugóelem elemi mozgási energiáját az anyagi pont energiájaként számítjuk ki:

$$dE_c = dm \cdot u^2 / 2 \quad [5]$$

A  $dm$  elemi tömeg egy (nagyon) ferde henger, melynek szélessége  $dx$ , ez bárhol lehet a rugó mentén (a tömeg egyenlőtlen eloszlása nem befolyásolja a  $dm$  elemi tömeg méretét):

$$dm = m_R \cdot dx / L$$

Feltételezzük, hogy a rugót egyenletesen tekercselték, és a szabad vég pillanatnyi sebessége  $v$ , a  $dm$  elemi tömeg sebessége arányos lesz  $x/L$ -lel.

$$u = v \cdot x / L \quad [7]$$

A tömegelem értékét [6] és annak sebességét [7] behelyettesítjük az [5] egyenletbe:

$$dE_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_R v^2}{L^3} x^2 dx$$

A rugó mozgási energiáját az elemi  $dE_c$  energiának [8] a rugó  $L$  hosszában való integrálásával kapjuk meg:

$$E_c = \int_0^L \frac{1}{2} \cdot \frac{m_R v^2}{L^3} x^2 dx \quad [9]$$

Az integrálás elvégzése után megkapjuk az egyik pontban rögzített rugó pillanatnyi teljes mozgási energiáját:

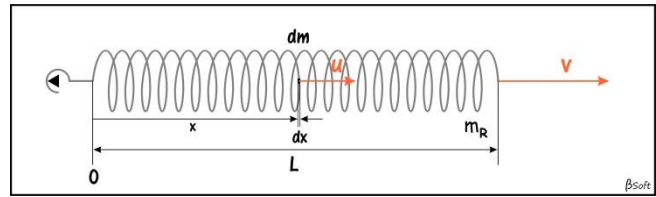
$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_R}{3} \cdot v^2$$

Ha a rugó tömegeloszlása egyenletes (a menetköz állandó), akkor a rugó  $\mu$  egyenértékű tehetetlensége a rugó  $m_R$  tömegének egyharmada, függetlenül a mozgás irányától.

$$\mu = \frac{m_R}{3} \quad [11]$$

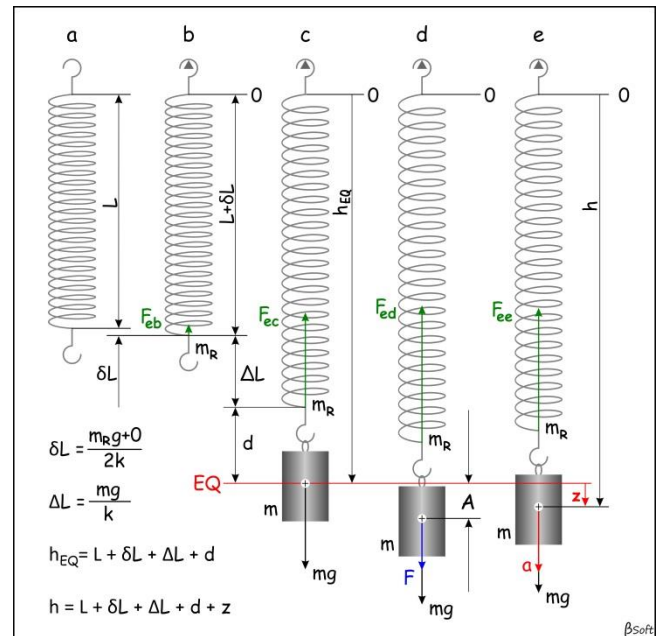
Az egyenértékű tehetetlenség mért értékei és meghatározási hibái 3. táblázat

|           |                                                                                                                                                |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| X rugó:   | $\mu_x = 10,00 \text{ g} \pm 1,81 \text{ g}$ ; $\delta\mu_x = \pm 18,1\%$ ; ahol $\delta\mu_x = \Delta\mu_x / \mu_x \cdot 100\%$               |
| Y rugó:   | $\mu_y = 8,79 \text{ g} \pm 1,43 \text{ g}$ ; $\delta\mu_y = \pm 16,3\%$ ; ahol $\delta\mu_y = \Delta\mu_y / \mu_y \cdot 100\%$                |
| XpY rugó: | $\mu_{xy} = 18,60 \text{ g} \pm 0,72 \text{ g}$ ; $\delta\mu_{xy} = \pm 3,9\%$ ; ahol $\delta\mu_{xy} = \Delta\mu_{xy} / \mu_{xy} \cdot 100\%$ |



7. ábra. A rugóelem sebességének kiszámítása

[10]



8. ábra. A rugó különböző helyzetei a rezgés kialakulása folyamán. Az a helyzetben a rugóra nem hat tengelyirányú erő, ez csak vízszintes helyzetben lenne lehetséges, de a távolságok könnyebb értelmezése érdekében függőleges helyzetben ábrázoltam.

## A rezgés periódusa

Figyelembe véve a rendszerre ható összes erőt, felírjuk a dinamika második törvényét. Ahhoz, hogy könnyebben láthatóak legyenek az egyes hatóerők, a 8. ábrán öt helyzetben ábrázoltam a rugót. Az  $F_e$  rugalmassági erő második indexe a rajzszámot jelenti.

- **Az  $L$  aktív hosszúságú rugóra nem hatnak erők.** Az alsó akasztó tömegét a nehezék részének tekintjük. Mivel a rugó nyugalomban van, nincsenek rugalmassági erők ( $F_{e1} = 0$ )
- **A rugó a saját súlya alatt megnyúlik.** Az elemzéskor a felső akasztótól indulunk, az akasztó és az elemezett pont közötti rugót a pont alatti rugó súlya nyújtja meg. A kezdetben ez az erő  $m_R g$ , a végén pedig zérus lesz. Feltételezzük az egyenletes tekeréscselést, így az elemi megnyúlások összeadása helyett elfogadjuk, hogy a rugót az  $(m_R g + 0)/2$  átlagerő nyújtotta meg. Az  $F_{e2}$  rugalmassági (elasztikus) erő egyenlő a rugó súlyának a felével.
- **Az  $m$  tömegű testet ráakasztjuk a rugóra.** Mivel az akasztónak nincs rugalmassági tulajdonsága, a tömegét hozzáadjuk a nehezék tömegéhez, a felső akasztó azonban nem vesz részt a rezgésben. A rendszer egyensúlyban van, a nehezék és az akasztó közös súlypontját egy kis kereszt jelzi, az  $EQ$  egyenes az egyensúlyi vonalat mutatja. A súlypont  $d$  távolságra van a rugó legalsó pontjától.

Felírhatjuk az erők egyensúlyát:

$$\left(\frac{m_R}{2} + m\right)g - k(\delta L + \Delta L) = 0 \quad [12]$$

Az  $EQ$  vonal a rezgés leírásának referenciája lesz, de a viszonyítási rendszert a rugó felső pontjához kötjük. Ebben a rendszerben az  $EQ$  ordinátája:

$$h_{EQ} = L + \delta L + \Delta L + d \quad [13]$$

- **$F$  erővel meghúzzuk a nehezéket,** annak súlypontja az  $EQ$ -hoz képest  $A$ -val megereszkedik.
- **Amikor elengedjük a testet,** a rugalmassági erő nagyobb, mint az egyensúlynál volt, egy visszaállító erő alakul ki, rezgés keletkezik. A rendszer  $0$  eredőjéhez képest a súlypont  $h$  távolságra lesz.

$$h = L + \delta L + \Delta L + d + z \quad [14]$$

A [14]-es egyenletből kivonjuk a [13]-as egyenletet, a rendezés után pedig megkapjuk a nehezék  $z$  helyzetét az  $EQ$  vonalhoz képest:

$$z = h - h_{EQ} \quad [15]$$

Összeadjuk a testre ható összes erőt, és felírjuk a dinamika második törvényét:

$$\left(m + \frac{m_R}{3}\right) \cdot a = mg + \frac{m_R g}{2} - k(\delta L + \Delta L + z) \quad [16]$$

A [12]-es és a [16]-os egyenletek összeadása, az egyszerűsítések, valamint az  $a = \frac{d^2 z}{dt^2}$  behelyettesítés után ezt kapjuk:

$$\left(m + \frac{m_R}{3}\right) \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz \quad [17]$$

A [17] egyenlet egy állandó együtthatójú, másodrendű, homogén differenciálegyenlet, amelyet könnyen megoldunk a partikuláris megoldások megtalálásával. A partikuláris megoldást a  $z = e^{rt}$  formában keressük, ahol az  $r$  egy fizikai értelem nélküli segédváltozó. Kiszámítjuk a deriváltakat és behelyettesítjük a [17]-be:

$$\frac{dz}{dt} = r e^{rt} \quad \text{és} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = r^2 e^{rt} \quad [18]$$

$$\left(m + \frac{m_R}{3}\right) r^2 e^{rt} + k e^{rt} = 0 \quad [19]$$

Mivel az  $e^{rt}$  kifejezés nem lehet zérus, végigoszthatunk vele. Ugyancsak osztunk  $\left(m + \frac{m_R}{3}\right)$ -mal, és egyelőre magyarázat nélkül  $\omega^2$ -tel jelöljük a kialakult  $k/(m+m_R/3)$  kifejezést:

$$\omega^2 = \frac{k}{\left(m + \frac{m_R}{3}\right)} \quad [20]$$

Megkaptuk a [17] differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét:

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad [21]$$

Az  $\omega^2$  jelölés látszólag hibás, mert két négyzet összege nem lehet zérus. A karakterisztikus egyenlet két gyöke két partikuláris megoldást fog adni, ezek lineáris kombinációja pedig a differenciálegyenlet általános megoldását. Ha elfogadjuk, hogy az egyenlet gyökei lehetnek imagináriusak is, akkor a lineáris kombináció egy harmonikus függvényhez ( $\sin$ ,  $\cos$ ) vezethet, azaz harmonikus oszcillátorunk lesz. Az  $\omega^2$  előtti „+” jelnek különleges fontossága van. Ez a jel csak akkor lesz pozitív, ha a [17] egyenletben a  $k$  előjele negatív, vagyis a visszaállító erő ellentétes a  $z$  kitéréssel. Ha ráadásul a  $k$  értéke állandó, akkor a rezgés harmonikus lesz. Elfogadjuk az értelmetlennek tűnt  $\omega^2$  jelölést, és kiszámítjuk a [21]-es egyenlet két imaginárius gyökét:

$$r_1 = +j\omega; \quad \text{és} \quad r_2 = -j\omega \quad [22]$$

Megkapjuk a differenciálegyenlet két partikuláris megoldását:

$$z_1 = e^{+j\omega t} \quad \text{és} \quad z_2 = e^{-j\omega t} \quad [23]$$

Az általános megoldást a két partikuláris megoldás lineáris kombinációjából állítjuk elő:

$$z = C_1 \cdot e^{+j\omega t} + C_2 \cdot e^{-j\omega t} \quad [24]$$

Ez egy akármilyen folyamatot leíró differenciálegyenlet általános megoldása. A harmonikus oszcillátor leírásához ezt az egyenletet két időpontban illeszteniünk kell a fizikai folyamatra, de ez nehéznek tűnik. Egy másik lehetőség az, hogy találjunk két fizikai mennyiséget, amelynek ismerjük az értékét a  $t = 0$  időpontban. Ezt az utóbbit választjuk, és kiszámítjuk a kitérést és a sebességet a kezdő időpontban. Ha  $t = 0$ , a kitérés éppen az  $A$  amplitúdó lesz:

$$A = C_1 + C_2 \quad [25]$$

Kiszámítjuk a kitérés első deriváltját (*a sebesség*):  $v = dz/dt$

$$\frac{dz}{dt} = j\omega C_1 e^{+j\omega t} - j\omega C_2 e^{-j\omega t} \quad [26]$$

A kezdeti időpontban a sebesség zérus. Egyszerűsítünk a nullától biztosan különböző  $\omega$ -val, majd a  $j$ -vel, ezt kapjuk:

$$0 = C_1 - C_2 \quad [27]$$

A [25] és [27] egyenletekből következik a  $C_1 = C_2 = A/2$ , ezt behelyettesítjük a [24]-be:

$$z = A \cdot \frac{e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}, \quad [28]$$

ahol a tört éppen az Euler képletből származtatható  $\cos \omega t$  kifejezése. A behelyettesítés után a rezgés egyenlete így alakul:

$$\boxed{z = A \cdot \cos \omega t} \quad [29]$$

Ha valami teljesen ismeretlen kifejezést  $\omega^2$ -tel jelöltünk, ez még nem jelenti azt, hogy az  $\omega$  a rezgés körfrekvenciája lenne. Megkeressük azt a két időpontot, amelyeknek  $2\pi$  szögműködés felel meg, ez a  $t_2 - t_1$  lesz a rezgés periódusa:

$$\omega t_2 - \omega t_1 = 2\pi; \quad T = t_2 - t_1; \quad T = 2\pi/\omega \quad [30]$$

A [20] és [30] egyenletekből megkapjuk a rugalmas inga periódusát (csak az egyenletesen teker-cselt rugóra érvényes):

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m + \frac{m_R}{3}}{k}} \quad [31]$$

Megkaptuk az [1]-es képletben feltételezett periódusképletet. Az egyenértékű tehetetlenség:  $\mu = m_R/3$ .

### A rugó tömegének ellenőrzése

Az  $m_R = 3\mu$  képlet csak a tökéletesen egyenletes tömegeloszlású rugó esetében érvényes. Az  $m_R/3$  a rugó dinamikus (tehetetlenségi) tömege, amely az egyik végén rögzített rugónak a tengelyirányú állapotváltozásokkal szembeni ellenszegülését jellemzi. A rendszer egyensúlyi helyzetében ([12] egyenlet) a gravitációs tömeg szerepelt, ezt elektronikus mérleggel meg is mértük (4. táblázat).

A tehetetlenségi tömeg meghatározása nagyon jó, ez megfigyelhető a rugók párhuzamos kapcsolása-kor létrejött hibánál:  $\varepsilon = (m_{Rx} + m_{Ry} - m_{R_{xpy}})/m_{R_{xpy}} \cdot 100 = 1,02\%$ . Az X rugó esetében látszik leg-jobban az egyenetlen tömegeloszlás hatása. Az X rugó dinamikus tömege 50 %-kal nagyobb a mérleggel mért tömeghez képest, de a csoporto-sításnál fellépő hiba csak 1,02%, azaz megfelelő a tehetetlenségi tömeg mérési módszere.

| A mért egyenértékű tehetetlenség és a rugótömeg kapcsolata |                                               |                                       |  | 4. táblázat |
|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------------------|--|-------------|
| X rugó:                                                    | $m_{Rx} = 3\mu_x = 30,00 \text{ g};$          | $m_{R_{xmérleg}} = 19,4 \text{ g}$    |  |             |
| Y rugó:                                                    | $m_{Ry} = 3\mu_y = 26,38 \text{ g};$          | $m_{R_{ymérleg}} = 24,6 \text{ g}$    |  |             |
| XpY rugó:                                                  | $m_{R_{xpy}} = 3\mu_{xpy} = 55,81 \text{ g};$ | $m_{R_{xpy mérleg}} = 44,0 \text{ g}$ |  |             |

### Hibaforrások

Az alkalmazott mérőrendszer sokkal performánsabb a szükségesnél. Éppen ez a precizitás tette lehe-tővé olyan jelenségek detektálását, amelyeket az egyszerűsített elmélet elhanyagolt. Még maradtak különböző rendszerhibák, egyeseket próbáltam lecsökkenteni. Íme, néhány megmaradt hibaforrás:

- **A mérések száma** (13) kevés, az adatfeldolgozás megkönnyítése végett, korlátoztam.
- **A differenciálegyenlet megoldásának könny-nyítése.** A [17] egyenletet állandó együttható-jú egyenletnek vettem. Ez csak a nagyon kicsi amplitúdók esetében realizálódik, mert csak ilyenkor kerülhetjük el a rugóállandó változá-sát a kitéréssel. Ha az amplitúdó nagy, a rez-gés már nem harmonikus, az egyenletet nehéz megoldani, ha ennek ellenére harmonikusnak vesszük, akkor nagy hiba keletkezik. Mecha-nikailag az amplitúdót 10 mm-re korlátoztam.
- **„Függőleges” rezgések.** Egy megfogó elekt-romágnest alkalmaztam (9. ábra), ennek egy kis rögzítő fészke van. Amikor az elektro-mágnest kikapcsol, a nehezék függőleges rez-géseket végez, még 50-60 rezgés után is.



**9. ábra.** A megfogó elektromágnest és a fénysorompó. A sárgaréz anyja biztosítja az állandó nehezék és az elektromágnest közvetlen érintkezésének a megszünte-tését, a remanencia hatásának lényeges csökkentését.

- **Az elektromágnes remanenciája.** A legerősebb hibaforrás. A remanencia hatásának egy elsődleges csökkentését az elektromágnes és a nehezék közötti távolság legnagyobb értékének beszabályozásával értem el. A sárgaréz anya nagyon finom menetű. Még van egy szabályozási lépcső: késleltetem a periódusmérés kezdetét, így a test kissé eltávolodik az elektromágnestől, közben a remanencia csökken, és megszűnik a Lenz-hatás is. Az első másodpercekben ellenőrizhetjük a rezgés függőlegességét, ha nem felel meg, megállítjuk a kísérletet, így elkerülünk egy rossz mérést.
- **Az X rugó menetei alul összetömörültek,** vagyis a rugó alja felé megnőtt a lokális egyenértékű tehetetlenség. A tanulmánynak nem célja a gravitációs tömeg ilyenszerű meghatározása, az más-ként sokkal egyszerűbben mérhető, ráadásul állandó, de a fenti ritkább menetek erőteljesebb igénybevétele befolyásolhatja a rugóállandó értékét, ezek mind hibaforrások lehetnek. Ezeket a hibákat sokkal könnyebb elkerülni, mint a rossz mérésekben azonosítani őket.

## Következtetések

- A laborgyakorlat elsődleges célja a valóság és az egyszerűsített modellek alapján levezetett törvények közötti kis ellentmondások megtalálása volt. Megvizsgáltam azokat az okokat, amelyek az egyszerűsített periódusképlet alkalmazását korlátozzák, és csak a rugóállandó nagyságrendjének meghatározását teszik lehetővé.
- Kifejlesztettem egy módszert, amely a rugóállandó dinamikus mérését és a rugó dinamikus tehetetlenségének egyidejű meghatározását teszi lehetővé. Egy-két periódusmérésből csak a rugóállandót véljük meghatározni, ilyenkor a dinamikus tehetetlenség „nem is látszik”. Más-más tömegekre kapott rugóállandó-eredményeink változásaiban mérési hibákra gyanakszunk, pedig csak a rossz adatfeldolgozási módszerünk takarta el a különbségek okát.
- A rugóállandó meghatározásának szórása 0,80% alatti, vagyis az illesztőegyenest nem „forog”. Másként szólva, ez a nehezékek tömegének meghatározási pontosságát bizonyítja. Egy egyenletesen tekercselt rugóval meghatározható lenne a dinamikus rugóállandó változása a nehezék tömegének függvényében, ezt össze lehetne vetni a statikus módszerekkel kapott változásokkal. A szabadesés tanulmányozására készülő „mini-szabadesés” készülékhez (10. ábra) beszerelhető precíziós megnyúlásmérő méréseiből származó  $k = f(m)$  másodfokú illesztőfüggvény több kitüntetett tömegpontban kapott deriváltját egyeztetethetnénk a fenti módszerrel mért helyi  $k$  értékekre. Ilyenkor a kitüntetett tömeg körüli nagyon sok dinamikus rugóállandó méréssel ellenőrizhető lenne a helyi statikus és dinamikus rugóállandók egyenlősége.
- Az egyenértékű tehetetlenség meghatározásának a hibája nagyobb 10%-nál, vagyis az illesztőegyenest függőleges szabadsága elég nagy. Másként szólva, ez a periódusmeghatározások pontatlanságára vall. A nullátmenetek detektálása mechanikailag rögzített, az időközmérés pontossága igen jó, felvetődik a periódus stabilitása, egyenlőtlensége, de nagyszámú méréssel és több tömegértékkel ez a hiba bizonyára csökkenthető lenne. *Erre nem találtam jobb magyarázatot.*



**10. ábra.** Félkész mini-szabadesés készülék. Kiegészítésként az oszlop aljára szerelt L formájú tartóba kerül az elektromágnes. A rugó megnyúlását század mm-es pontossággal lehet megmérni.

## Mérés közbeni hangulat

A nagyvárad Adyban mindig nagy kihívást jelentett az adatfeldolgozós kísérletek referátumainak elkészítése. Az előfeltétel a mérések pontossága volt, mert a csoport egyik mérési jegyzőkönyvét mindig elkértem, így nem volt lehetséges az adatok utólagos „kozmetikázása”. Az évek során ezt a laborgyakorlatot számtalanszor elvégeztük, a kicsik csak mérni tanultak, a nagyok az adatfeldolgozást is kószolták. A mellékelt képen a rugalmas ingával kísérletező nagydiákok egyik csoportját látjuk, a másik csoport nem fért bele a felvételbe (*14 mérőhely*). A felsőbb éveseket mindig előre figyelmeztettem, hogy egy-két mérés után, a tanult képlet alapján a többi mérést nehogy a számítógéppel generálják (*programozást is tanítottam nekik*), mert az általam tanított és általánosan elfogadott képlet a pontos mérésekkel nem igazolható. A **Fizikum** jó hangulatát a kísérletezés élménye, az egyszerű feladat buktatóinak remélt megoldása és a kellemes háttérzene biztosította. Az erre rátevődött munkahangulati morajjal együtt, a tanárnak ezek az órák örök élményt jelentenek.



**11. ábra.** Laborgyakorlat a rugalmas ingával

Nagyvárad, 2016 márciusában

dr. Bartos-Elekes István  
beistvan@yahoo.com