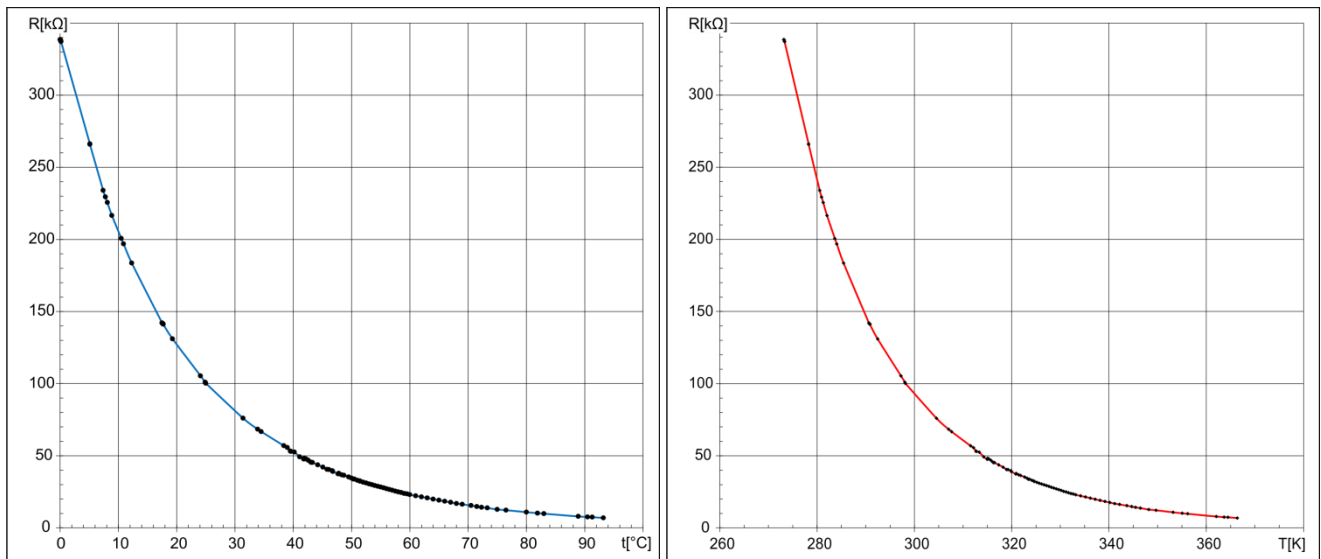


Laborgyakorlat intrinszik félvezetővel

A fizikus a mérései befejeztével legelőször megszerkeszti a mérések grafikonjait. Az alábbi grafikonokból jól látható, hogy a termisztor ellenállása nagyjából exponenciálisan változik az abszolút hőmérséklettel, tehát a különböző számításokhoz használhatjuk a feladatban megadott képleteket.



A b[K] anyagállandó kiszámítása. Az $R = A \cdot \exp(b/T)$ empirikus képletben az A értéke gyengén függ a hőmérséklettől¹, ezért egy exponenciális görbével való közelítés nem lett volna megfelelő. Az előbbi képletet felírjuk a T_1 és T_2 hőmérsékletekre, majd a két egyenletet elosztjuk egymással, így kizárjuk az A ismeretlent, de megjelenik a $T_2 - T_1$, ami komoly hibák forrása lehet. A hibák csökkentése érdekében egymástól nagy távolságra levő hőmérsékleteket keresünk, a hőmérsékletpárokat a kicsi és a nagy hőmérsékletek közül választjuk. Az adatokat az alábbi táblázatba gyűjtöttük össze:

Nr.	N ₁	t ₁ [°C]	T ₁ [K]	R ₁ [kΩ]	N ₂	t ₂ [°C]	T ₂ [K]	R ₂ [kΩ]	ΔT=T ₂ -T ₁	T ₁ ·T ₂ /ΔT	ln(R ₁ /R ₂)	b[K]
1	8	7.39	280.5	234.0	80	66.0	339.2	18.390	58.6	1623.3	2.5435	4128.9
2	9	7.78	280.9	229.4	81	67.0	340.2	17.632	59.2	1613.5	2.5658	4140.0
3	10	8.11	281.3	225.6	82	68.0	341.2	16.873	59.9	1602.2	2.5930	4154.5
4	11	8.89	282.0	216.6	83	69.0	342.2	16.284	60.1	1605.4	2.5879	4154.4
5	12	10.5	283.7	200.7	84	70.5	343.7	15.446	60.0	1624.6	2.5642	4165.8
6	13	10.9	284.1	196.9	85	71.5	344.7	14.768	60.6	1615.5	2.5900	4184.1
7	14	12.3	285.5	183.6	86	72.3	345.5	14.232	60.0	1643.5	2.5570	4202.5
8	15	17.5	290.7	142.1	87	73.3	346.5	13.762	55.8	1804.6	2.3346	4213.0
9	16	17.6	290.8	141.7	88	75.0	348.2	12.750	57.4	1763.5	2.4083	4246.9
10	17	17.6	290.8	141.6	89	76.5	349.7	12.267	58.9	1726.0	2.4458	4221.4
11	18	17.7	290.9	141.3	90	80.0	353.2	10.864	62.3	1648.7	2.5656	4230.0
12	19	17.7	290.9	141.2	91	81.9	355.1	10.160	64.2	1608.5	2.6314	4232.6

Az egymástól távol eső 12 hőmérsékletpárra (T_1 és T_2) felírhatjuk:

$$R_1 = A_1 \cdot \exp(b/T_1) \quad [1]$$

$$R_2 = A_2 \cdot \exp(b/T_2) \quad [2]$$

Az [1]/[2] osztás után elfogadjuk az $A_1/A_2=1$ -et, majd a megmaradt egyenlet logaritmálása után ezt kapjuk:

$$b = T_1 \cdot T_2 / (T_2 - T_1) \cdot \ln(R_1/R_2). \quad [3]$$

¹ Charles-Kittel - Introduction-to-Solid-State-Physics, John Wiley & Sons, California, 2005, p207

Ebben a kifejezésben a $T_2 > T_1$ és $R_1 > R_2$, tehát a $b[K]$ pozitívnak adódik. Ha a $[2]/[1]$ arányt képeztük volna, akkor $T_1 - T_2 < 0$ és $\ln(R_2/R_1) < 0$, vagyis $b[K] > 0$, de természetesebbnek tartottam az első esetet. A fenti táblázatban kiszámítottuk a $b[K]$ -t a 12 hőmérsékletpárra, ennek az átlaga $b = 4189,5 \text{ K} \pm 11,6 \text{ K}$, itt elfogadjuk a négy digités értékét: $b = 4190 \text{ K}$. A mellékelt ábrán a kísérletben alkalmazott **NTCM-100k-B4250** termisztor gyári adatlapja látható, ahol **NTC** = Negative Temperature Coefficient, **M**=Measurement, a többi magától értődik. A gyárban a b anyagállandót $t_1 = 25^\circ\text{C}$ és $t_2 = 85^\circ\text{C}$ stabilizált hőmérsékleteken határozzák meg. A gyári adatlapon megadottal jobban egyező értékeket kaphatunk volna, ha ezen hőmérsékletek környékén sokkal több mérést végeztünk volna.

SR PASSIVES NTCM-100K-B4250	
NTC thermistor; 100kΩ; THT; 4250K; -55+125°C; 3.5mW; Ø3x4mm	
SPECIFICATION	TECHNICAL INFORMATION
Manufacturer	SR Passives
Sensor type	NTC thermistor
Resistance	100kΩ
Mounting	THT
Material constant B	4250K
Operating temperature	-55...125°C
Power	3.5mW
Body dimensions	Ø3 x 4mm
Application	electronic thermometres, temperature measurement
Features	enamelled cu wire

Az $A[m\Omega]$ eszközállandó meghatározása. Az N_1 és N_2 mérési sorozat ellenállásaival és hőmérsékleteivel való számításra az [1] és [2] egyenletet használjuk, ebből származik a [4] és az [5] egyenlet:

$$A_1 = R_1 \cdot \exp(b/T_1) \quad [4]$$

$$A_2 = R_2 \cdot \exp(b/T_2) \quad [5]$$

A kiszámított értékeket az alábbi táblázatba gyűjtöttük össze:

Nr.	N_1	$T_1[K]$	$R_1[k\Omega]$	N_2	$T_2[K]$	$R_2[k\Omega]$	$b[K]$	$\exp(b/T_1)$	$\exp(b/T_2)$	$A_1[m\Omega]$	$A_2[m\Omega]$
1	8	280.5	234.0	80	339.2	18.390	4189.5	3.060E+06	2.317E+05	76.48	79.39
2	9	280.9	229.4	81	340.2	17.632	4189.5	2.997E+06	2.234E+05	76.54	78.93
3	10	281.3	225.6	82	341.2	16.873	4189.5	2.945E+06	2.155E+05	76.62	78.31
4	11	282.0	216.6	83	342.2	16.284	4189.5	2.826E+06	2.079E+05	76.64	78.34
5	12	283.7	200.7	84	343.7	15.446	4189.5	2.597E+06	1.971E+05	77.25	78.38
6	13	284.1	196.9	85	344.7	14.768	4189.5	2.544E+06	1.902E+05	77.38	77.64
7	14	285.5	183.6	86	345.5	14.232	4189.5	2.366E+06	1.849E+05	77.57	76.96
8	15	290.7	142.1	87	346.5	13.762	4189.5	1.820E+06	1.786E+05	78.08	77.07
9	16	290.8	141.7	88	348.2	12.750	4189.5	1.811E+06	1.683E+05	78.25	75.75
10	17	290.8	141.6	89	349.7	12.267	4189.5	1.811E+06	1.599E+05	78.17	76.74
11	18	290.9	141.3	90	353.2	10.864	4189.5	1.802E+06	1.420E+05	78.43	76.53
12	19	290.9	141.2	91	355.1	10.160	4189.5	1.802E+06	1.332E+05	78.33	76.26

A 24 mérésből kiszámított eszközállandó értéke: $A = 77,50 \text{ m}\Omega \pm 0,27 \text{ m}\Omega$

Az $E_g[eV]$ tiltott-sáv szélességének kiszámítása. A $b[K]$ tartalmazza a tiltott-sáv E_g szélességét. A feladatban megadott egyenletekből indulunk ki, majd elvégezzük a behelyettesítéseket: $E = U/I$; $j = I/S$; $R = U/I$; $b = E_g/2k$.

ahol az $A = I[e \cdot S \cdot C_i \cdot (\mu_n + \mu_p)]$ jelölést vezettük be, az l a termisztor hossza.

$$j = e \cdot (n_i \mu_n + p_i \mu_p) \cdot E \quad [6]$$

$$n_i = p_i = C_i \cdot \exp(-E_g/2kT) \quad [7]$$

$$I/S = e \cdot C_i \cdot \exp(-E_g/2kT) \cdot (\mu_n + \mu_p) \cdot U/l \quad [8]$$

$$R = A \cdot \exp(b/T) \quad [9]$$

ahol $A = I[e \cdot S \cdot C_i \cdot (\mu_n + \mu_p)]$, l szintén a termisztor hossza

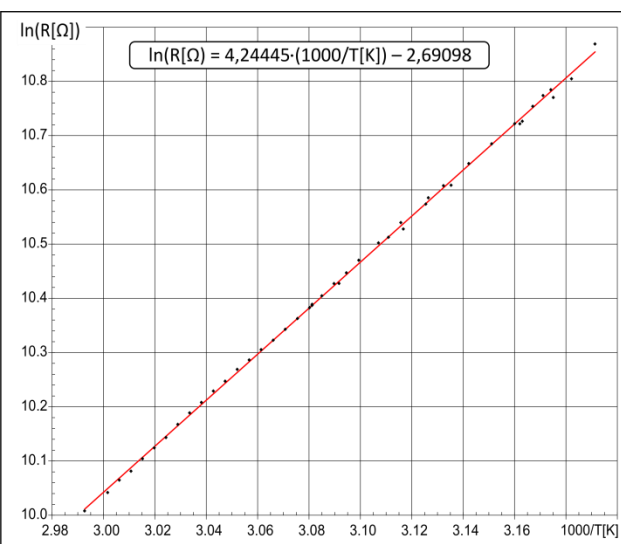
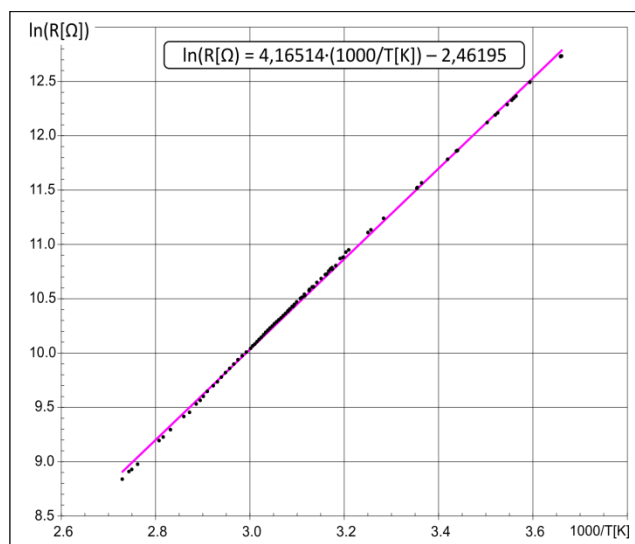
A meghatározott $b[K]$ átlagértéke és a Boltzmann-állandó $k = 1,38065 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ alapján kiszámítható az E_g :

$$E_g = b \cdot 2k = 4190 \text{ K} \cdot 2 \cdot 1,38065 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = 1,157 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0,722 \text{ eV}$$

Megkaptuk az intrinszik félvezető tiltott-sávjának a szélességét: $E_g = 1,157 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0,722 \text{ eV}$.

Hibaforrások. Az alkalmazott mérőműszerek pontossági osztálya magasabb az effajta egyszerű mérések elvégzéséhez szükséges műszerek pontossági osztályánál. Mégis az anyagállandó meghatározásánál egy -1,4%-os hiba jelentkezett, pedig a $b[K]$ értékének pontosságát a gyár $\pm 0,5\%$ -ra garantálja. A kísérletező fizikus ilyenkor megkeresi a kísérlet elvégzésekor felmerülő hibaforrásokat. Én a következőket találtam:

- **A hőmérséklet mérése.** Ahhoz, hogy a számításoknál ne hibázzunk sokat, a hőmérsékleteket olyan pontossággal kell meghatározni, hogy a különbségükben legalább három biztos számjegy maradjon. Minket nem annyira a hőmérséklet abszolút értéke, mint a mérések linearitása érdekel, csak így tudunk biztonságosan hőmérsékletkülönbségeket képezni. Egy $\pm 0,1^\circ\text{C}$ -os azaz $0,1\text{ K}$ -es feloldási hiba a körülbelül 60 K -es hőmérsékletkülönbséghez viszonyítva maximum $\pm 0,1\text{ K}/60\text{ K}$, vagyis $\pm 0,17\%$ -os relatív feloldási hibát jelent. Ha a különbség csak 10 K , akkor ez a feloldási hiba már $\pm 1\%$ -os lenne. Összehasonlítottam az elektronikus hőmérő és a higanyos lázmérő testhőmérsékletre adott értékeit, és egy $+0,5^\circ\text{C}$ -os különbséget találtam a lázmérőhöz képest. Látszólag ez igen nagy hiba, de ne feledjük, hogy a hőmérsékleteket valójában K -ben mérjük, így a 36°C (309 K) hőmérsékletnél a relatív hiba $+0,5\text{ K}/309\text{ K} = +0,16\%$, amely bőven megfelel a mérési céljainknak.
- **A termisztor ellenállásának mérése.** Hasonló a helyzet a termisztor ellenállásának meghatározásánál. Az R_1/R_2 egy egyszerű arány, de annak logaritmusa két logaritmus különbségét jelenti, amely így már egy komoly hibaforrásként jelentkezik. Még egy érv ahhoz, hogy nem vehetjük figyelembe a nagyon közeli mérési pontokat. Az ellenállások $\pm 0,1\%$ -os mérési pontossága elégséges a különböző hőmérsékleten levő termisztorok ellenállásának meghatározására.
- **Az adatsűrűség nem egyenletes.** Az alacsony hőmérsékleteken a környezettel való hőcsere igen kismértékű, így jó keveredés jön létre, a hőmérséklet sokáig szinte állandó marad. A sok tíz, igen pontos mérés helyett csak néhányat jegyeztem fel, de sok mérőpontot kellett volna felvennem, ahhoz, hogy jobban súlyozhassák a jó mérési pontokat az alacsony hőmérsékleteken.
- **Leolvasási hibák.** A különböző hozzáférési idők és a folyadék nagy hűlési sebessége miatt a magasabb hőmérsékleteken leolvasási hibák történnek. Ezeket jó szigeteléssel (termosz), vagy számítógépes méréssel és regisztrálással lehetne elkerülni, de ez itt nem jöhetett szóba.
- **Termoelektromos feszültség.** Ha a nem azonos anyagok érintkezési pontjai között hőmérsékletkülönbség van, akkor ott termoelektromos feszültség keletkezik, ez befolyásolja az áramkörben folyó áramot, megváltoztatja a termisztor ellenállásának mérését. A mi esetünkben ez lényegtelen, mert a termisztor és a csatlakozásai gyakorlatilag azonos hőmérsékleten vannak (*a pici termisztorban igen kicsi hőmérséklet-gradiens keletkezik*). Marad azonban a két-két kontaktus közötti ellenállások összege, ez hozzáadódik a mért ellenállásértékhez. A mi esetünkben ez is elhanyagolható, hiszen a termisztorunk ellenállása igen sok $k\Omega$.
- **Hibaforrások a legkisebb négyzetek módszere alkalmazásánál.** Az $R[\Omega] = A \cdot \exp(b/T[K])$ függvény logaritmalásakor a $\ln(R) = b/T + \ln(A)$ függvényt kapjuk, amely egy egyenes $1/T$ -ben. A grafikon egyszerűsége miatt az ábrázolást $1000/T[K]$ függvényében végezzük el. A legkisebb négyzetek elvével megkapott egyenes irányítányezője éppen a b anyagállandó. A baloldali grafikonnál minden mérőpontot felhasználtunk,



a jobboldalinál pedig csak a közepes hőmérsékleteket vettük figyelembe. Egy mérés technikai hiba kis adatsűrűséget eredményezett a szélső hőmérsékleteknél. A magas hőmérsékleteknél a nagy hűlési sebesség a különböző hozzáférési idők miatt leolvasási hibákat okozott. Az alacsony hőmérsékleteknél nagyon pontos méréseink vannak, de az említett okok miatt ezekből igen kevés van. A legkisebb négyzetek módszere „észrevette” a különböző adatsűrűségeket, ez jól látszik a baloldali grafikonon. A jobboldali grafikonon a $T_{31}..T_{75}$ mérési pontokat ábrázoltuk, ezek a jó, közel egyenletesen szétszórt mérések.

Kísérleti eredmények. Csak a legkisebb négyzetek módszere képes feldolgozni nagy pontossággal az összes mérési eredményt. Az elsőként bemutatott adatfeldolgozási próbálkozásokat inkább csak a jó munkamódszer ellenpéldájaként mutattuk be. A legkisebb négyzetek módszere segítségével² kiszámíthatjuk a mérésekre illesztett egyenes irányítványozójának (σ_m) és tengelymetszetének (σ_n) szórás hibáit. Egy sajátfejlesztésű, még 1994-ben készült programcsomag függvényei segítségével az illesztő egyenes paramétereinek legvalószínűbb szórás sávjait ($2\sigma_m$ és $2\sigma_n$) is ki lehet számítani. A program segítségével a fenti két grafikon $y=mx+n$ illesztő egyenesének paramétereiből közvetlenül megkapható a **b** anyagállandó és az **A** eszközállandó értéke is. A végleges kísérleti eredmények:

• **A baloldali grafikon** (96 mérés: $T_{1}..T_{96}$):

- Az illesztő egyenes ($1/T$ -ben) paraméterei: **$m = 4165,14;$** **$n = -2,46195$**
- A paraméterek bizonytalansága: **$\sigma_m = 1,13095E+01;$** **$\sigma_n = 3,58079E-02$**
- Anyagállandó: **$b = 4165,1 \text{ K} \pm 11,31 \text{ K}$**
- A tiltott-sáv szélessége [J]: **$E_g = 1,1501E-19 \text{ J} \pm 0,00312E-19 \text{ J}$**
- A tiltott-sáv szélessége [eV]: **$E_g = 0,7179 \text{ eV} \pm 0,00195 \text{ eV}$**
- Eszközállandó: **$A = 85,27 \text{ m}\Omega \pm 3,054 \text{ m}\Omega$**

• **A jobboldali grafikon** (csak a közepes hőmérsékletű 45 mérés: $T_{31}..T_{75}$):

- Az illesztő egyenes ($1/T$ -ben) paraméterei: **$m = 4244,45;$** **$n = -2,69098$**
- A paraméterek bizonytalansága: **$\sigma_m = 1,50139E+01;$** **$\sigma_n = 4,64357E-02$**
- Anyagállandó: **$b = 4244,4 \text{ K} \pm 15,01 \text{ K}$**
- A tiltott-sáv szélessége [J]: **$E_g = 1,1720E-19 \text{ J} \pm 0,00415E-19 \text{ J}$**
- A tiltott-sáv szélessége [eV]: **$E_g = 0,7316 \text{ eV} \pm 0,00259 \text{ eV}$**
- Eszközállandó: **$A = 67,81 \text{ m}\Omega \pm 3,150 \text{ m}\Omega$**

• **A gyártó adatai** (az adatlapok alapján rekonstruáltam):

- Anyagállandó: **$b = 4250 \text{ K}$**
- A tiltott-sáv szélessége [J]: **$E_g = 1,1735E-19 \text{ J}$**
- A tiltott-sáv szélessége [eV]: **$E_g = 0,7326 \text{ eV}$**
- Eszközállandó: **$A = 64,46 \text{ m}\Omega$**

Befejeztünk egy nagyon egyszerű kísérletet, az egyszerű kísérleti eszközök lehetővé tették az intrinszik félvezető fontosabb paramétereinek meghatározását. Ezt a laborgyakorlatot az évek során az iskolánk **Fizikum** nevű laboratóriumában a diákok kétszer is elvégezték: egyszer X-es korukban, ekkor csak a termisztor nagyon kicsi hozzáférési idejét és az ellenállásának a hőmérséklettől való exponenciális függését vizsgálják, majd a XII-ben a kísérletezés technikájából kapnak ízelítőt, és a mérési adatok faggatását gyakorolják. *Mindkettő nagyon sikeres volt!*

Nagyvárad, 2015 novemberében

dr. Bartos-Elekes István, a feladat szerzője

² W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky és W. T. Vetterling, Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 2007, p773 – p839